

波浪能量最大输出功率设计

摘要

问从求解波浪能发电装置的最优输出功率出发，通过考虑垂荡、纵摇两种运动模式，调整不同的线性或非线性的 PTO 内置阻尼器的阻尼系数，并设置合理的输出功率评价指标，求得不同运动模式下的装置中浮子和振子的运动结果，并分别探究线性阻尼和分线性阻尼下的最优阻尼系数。

针对问题一：依据题目所给的运动模式要求，我们考虑浮子和振子在仅有垂荡运动下的轨迹方程以及运动参数。首先我们建立一个单一的一位坐标系用于描述浮子和振子的运动，随后分别对二者进行受力分析，得到其运动结果。

针对问题二：首先我们在问题一所得的浮子和振子运动方程的基础上，调整 PTO 装置中阻尼器的阻尼系数为线性和非线性两种，并使用经过一段时间演化后的输出功率谱的黎曼和作为平均输出功率的指标；经过适当的调整阻尼的线性系数和非线性幂次系数，得到不同阻尼系数对平均输出功率的影响趋势；最后使用网格搜索法，求得最大平均输出功率对应的最优阻尼系数。

针对问题三：首先对浮子和振子的运动状态重新分析，在综合考虑了垂荡和纵摇后，考虑分别对浮子和振子进行受力（矩）分析。考虑系统有直线阻尼器和旋转阻尼器两个组件进行功率输出，所以采用与问题二相同的功率指标来表征再垂荡家纵摇状态下的 PTO 输出性能。同时，考虑到在长时动态平衡状态下，浮子和振子所解和的整体将保持在唯一平面内且竖直运动方向不发生横向偏移，可以对模型进行一定的假设和简化，令浮子或振子均仅有竖直方向和角向的运动。用所列方程组解出浮子和振子的运动结果，以及题目给定的阻尼系数下的最大输出功率。

针对问题四：在问题三所建立的模型基础上，考虑直线阻尼系数和旋转阻尼系数均为未知常量，利用网格搜索法得到使得输出平均功率指标最大的最优阻尼系数，并带入求得此时的最大功率。

关键词：纵摇，垂荡，最优阻尼系数，平均输出功率，网格搜索

1 问题重述

在波浪的作用下，波浪能装置中的浮子带动振子运动，振子中的能量输出系统（PTO）利用浮子与振子的相对运动驱动阻尼器做功，并将所作的功作为能量输出。在装置其他参数一定的情况下，调节合适的阻尼参数可以得到最大的输出功率。要达到这一目的，需要建立浮子与振子在外波浪相关作用下的运动模型，从而求解出两者的相对运动规律，进而确定阻尼系数与最大输出功率的关系。本文主要考虑两种该装置的主要运动模式：垂荡和纵摇。在问题一、二中，仅考虑装置进行纵摇运动；在问题三、四中，同时考虑纵摇和垂荡两种运动。

2 问题分析

2.1 对于问题一的分析

本问考虑浮子在波浪的作用下只做垂荡运动。系统的运动可以看作：在（波浪激励力） $f\cos\omega t$ 作用下，由PTO系统连接的浮子与振子做一维二体受迫振动，PTO系统主要包含弹簧和阻尼器。依据题目要求，建立不同阻尼系数下的浮子和振子的数学模型，并进一步求解出二者在一定时间范围内的垂荡位移和速度。

由于问题较为简单且明确，我们使用一维木模型来刻画浮子和振子的运动，且建立了单一坐标系即可。同时，我们对浮子和振子分别列出运动（牛顿第二定律）方程，即可求解。

2.2 对于问题二的分析

在问题一的模型基础上，分别探究线性与非线性阻尼系数对PTO系统的平均输出功率的影响，由于波浪能装置假定的初始条件为静止且平衡，所以在时间开始阶段模型处于一个动态不平衡阶段；模型所需要的是稳定的平均功率输出，那么我们可以使用网格搜索法，考虑经过适当时间演化后的一段时间内，对出现一定规律的输出功率 P 使用黎曼和来表征，即可求得使得该表征最大的阻尼系数，反代入参数后可求解出最大平均输出功率。

2.3 对于问题三的分析

本问在一维二体垂荡运动的基础上增加了另一维度的纵摇运动，再使用一维坐标系统对问题分析阻碍较大，所以我们对浮子和振子的运动过程进行剥离，分别考虑两者的垂荡、纵摇两种运动以及二者的相互作用。结合附件 2 所给的装置运动示意图，认为装置再具有垂荡和纵摇运动的同时，仍能保持在一定的竖直方向上，即不随着波浪的波矢运动方向移动，可以对模型进行一定地简化和假设：选定纵摇运动的转动中心，且考虑二者的纵摇角度采用统一的参考系，避免了角度坐标变换。对于振子的垂荡运动，采用相对坐标系，即振子保持在连杆上相对于转动中心的非线性振动，其余的模型假设将在假设说明栏详细给出，这里不再赘述。

至此可以分别建立浮子和振子的垂荡及纵摇数学模型，考虑二者的相互作用后，可以求解出在一定时间范围内的浮子和振子的垂荡位移、速度以及角向位移和角速度。

2.4 对于问题四的分析

问题四与问题三采用相同的模型来分析，其主要差异在于直线阻尼系数和旋转阻尼系数的考量。在问题四中我们考虑直线阻尼系数和旋转阻尼系数均为常量的前提条件下，尝试寻找改变两个系数对输出功率的影响。与问题二相同，我们同样可以定义一个平均输出功率的表征，并尝试使用网格搜索法，来求得使得该表征最大的最优直线阻尼系数和旋转阻尼系数。

3 模型假设

- 液体无旋无粘且不可压缩
- 所有过程中圆锥部分未浮出水面，且浮子上表面未触碰海水
- 忽略中轴、底座、隔层及 PTO 质量和各种摩擦
- 装置的运动始终保持在一个平面内，即只有纵摇和垂荡
- 认为 PTO 最大输出功率即为阻尼器做功，不考虑内部能量转化、发电机能量俘获效率等过程等带来的损耗
- 忽略浮子的厚度，使用质量面密度来计算转动惯量
- 振子视作质量分布均匀的实心圆柱体

4 符号说明

表 1 模型符号说明

符号	说明
m_1	浮子的质量
m_2	振子的质量
x_1	浮子的位移
x_2	振子的位移
M	垂荡附加质量
B	线性阻尼系数
ξ	转动阻尼系数
ρ	海水密度
g	重力加速度
f	垂荡激励力
ω	入射波浪角频率
k	垂荡兴波阻尼系数
η	纵摇兴波阻尼系数
κ	直线弹簧弹性系数
σ	转动弹簧弹性系数
V_0	初始静止平衡时排开水体积
r_1	圆柱半径
r_2	振子半径
γ	静水恢复力矩系数
I_A	纵摇附加转动惯量

5 模型的建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 模型建立

建立一维的两体受迫振动模型来研究装置的垂荡运动。

考虑考虑波浪能装置在静水中达到平衡状态作为运动的初始条件。对于系统整体，受到重力 $(m_1 + m_2)g$ 和浮力 $\rho g V_0$ 。二力平衡计算得到初始的排开水体积： $V_0 = \frac{34}{15}\pi$ ，此时的圆锥完全没入水中，圆柱部分有 2.0 米的深度没入水中。取竖直向上为正方向，设水平面处位移为 0，则浮子的初始位移为 $x_1 = 0$ ，取振子的重心为其位移参考点，则通过计算振子受到的重力与弹簧弹力二力平衡得到振子的初始位移 $x_2 = -1.548m$ 。初始状态两者均静止。由此得到两体运动的初始条件：

$$\begin{cases} x_1 = 0; x_2 = -1.548m; \\ \dot{x}_1 = 0; \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

浮子与振子的相对速度为 $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ m/s，弹簧相对原长的伸长量为 $(x_2 - x_1 + 1.25)$ m，由于浮子振动引起的浮力变化为 $-\rho g x_1 \pi r^2$

分析得，浮子受到波浪激励力、重力、浮力、弹簧弹力、阻尼器的阻尼力兴波阻尼力；振子受到阻尼器阻尼力、重力和弹簧弹力。列出运动方程：

$$\begin{aligned} (M + m_1)\ddot{x}_1 &= f \cos \omega t - m_1 g - B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \kappa(x_2 - x_1 + 1.25) + \rho g [V_0 - x_1 \pi r^2] - k x_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - m_2 g - \kappa(x_2 - x_1 + 1.25) \end{aligned} \quad (2)$$

其中，阻尼系数 B 需要按照 (1)、(2) 的不同要求，将正确的形式代入模型进行求解：

$$(1) B = 10^4 N \cdot s/m \quad ; \quad (2) B = 10^4 \sqrt{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|} N \cdot s/m$$

5.1.2 求解结果

(1) 取 $B = 10^4 N \cdot s/m$ 时，模型求解得到的结果如下（位移单位：米，速度单位：米/秒）

表 2 问题一 (1) 模型求解结果

		时间/秒	10	20	40	60	100
浮子	垂荡位移		-0.19072	-0.59069	0.28537	-0.31451	-0.08362
	垂荡速度		-0.64101	-0.24095	0.31297	-0.47945	-0.60421
振子	垂荡位移		-1.75973	-2.18230	-1.25155	-1.87949	-1.63212
	垂荡速度		-0.69395	-0.27278	0.33291	-0.51573	-0.64300

在波浪激励力作用下，前四十个周期内，以 0.2s 为步长取点分别做出“垂荡位移-时间”和“速度-时间”的关系图如下：

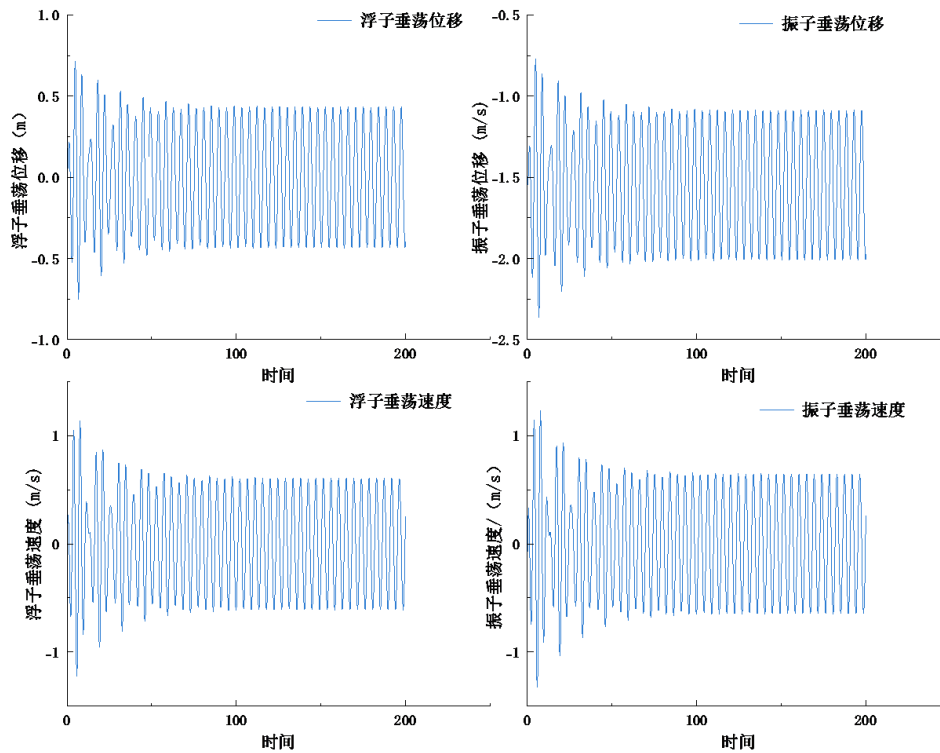


图 1 问题一 (1) 的浮子和振子的垂荡位移和速度随时间变化曲线

(2) 取 $B = 10^4 N \cdot s/m$ 时, 模型求解得到的结果如下 (位移单位: 米, 速度单位: 米/秒)

表 3 问题一 (2) 模型求解结果

		时间/秒	10	20	40	60	100
浮子	垂荡位移		-0.20588	-0.61111	0.26876	-0.32717	-0.08842
	垂荡速度		-0.65282	-0.25478	0.29530	-0.49152	-0.60983
振子	垂荡位移		-1.78262	-2.20911	-1.26789	-1.89766	-1.64154
	垂荡速度		-0.69994	-0.27702	0.31252	-0.52559	-0.65008

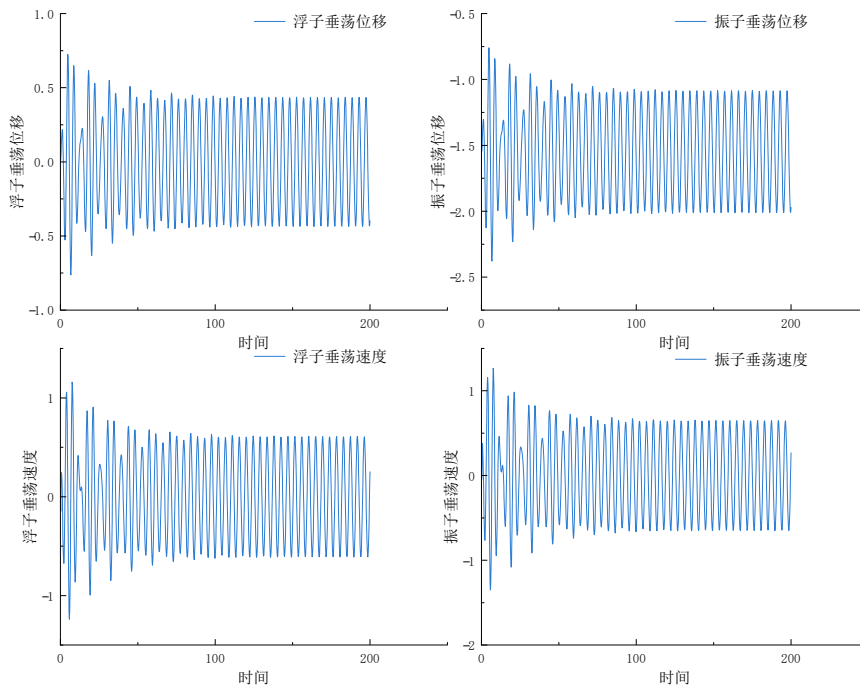


图 2 问题一（2）浮子和振子的垂荡位移和速度随时间变化曲线

5.2 问题二

在已有的垂荡模型的基础上，可以通过改变直线阻尼器的阻尼系数来探究阻尼系数与 PTO 输出功率的关系，从而确定最大输出功率及其相应的最优阻尼系数。需要说明的是，在一定的模型下求解出的位移曲线是一个振荡波的形式，且在一定时间后，二体振动参能够达到平衡的状态。因此，PTO 系统的瞬时功率随时间变化的曲线也是一条振荡的曲线。

根据 $P = Fv$ 可以计算出 PTO 系统的瞬时功率为

$$P = B|\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^2 \quad (3)$$

关于 PTO 系统平均输出功率，可以考虑用经过足够长时间的演化后（1000s 至 1080s）的一段时间时间范围内的瞬时功率的黎曼和除以时间来表征平均功率：

$$\bar{P} = \frac{1}{80} \sum_i^N P(t_i) \Delta t_i = \frac{1}{1600} \sum_i^N P(t_i) \quad (4)$$

下文将讨论两种形式的直线阻尼系数下求解模型。

1. 考虑直线阻尼系数为常数，在区间 $[0, 100000]$ 内求解出 (B, P) ，得到两者关系曲线如下图所示：

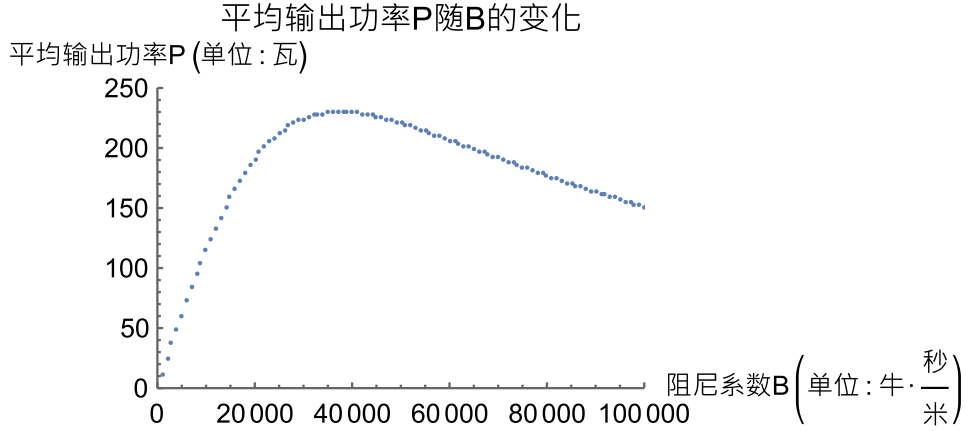


图 3 平均输出功率 P 与直线阻尼系数 B 的关系曲线 (0 到 100000)

可以从上图看出, 平均输出功率随着阻尼系数增加而先增后减, 存在一个取得极大值的区间。缩小步长在更精确的区间内进行求解得:

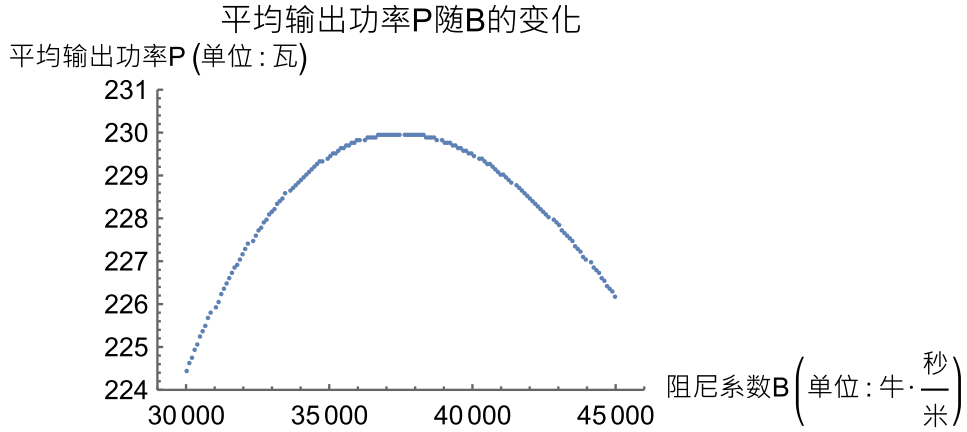


图 4 平均输出功率 P 与直线阻尼系数 B 的关系曲线 (30000 到 45000)

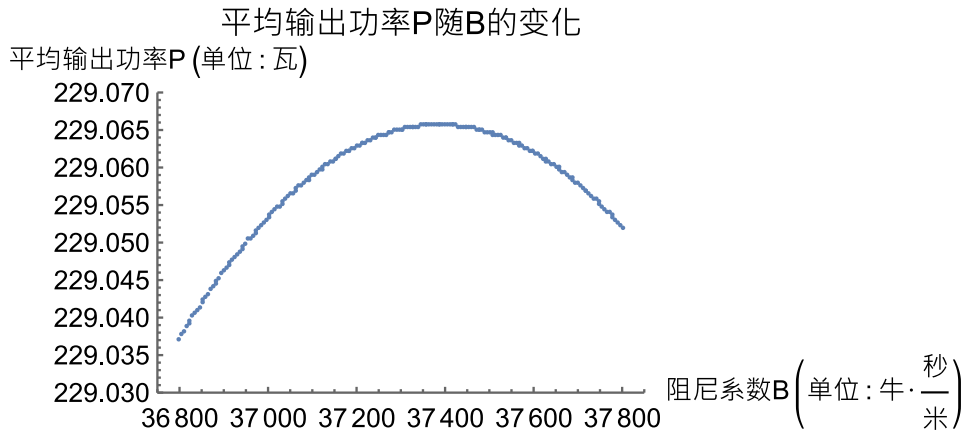
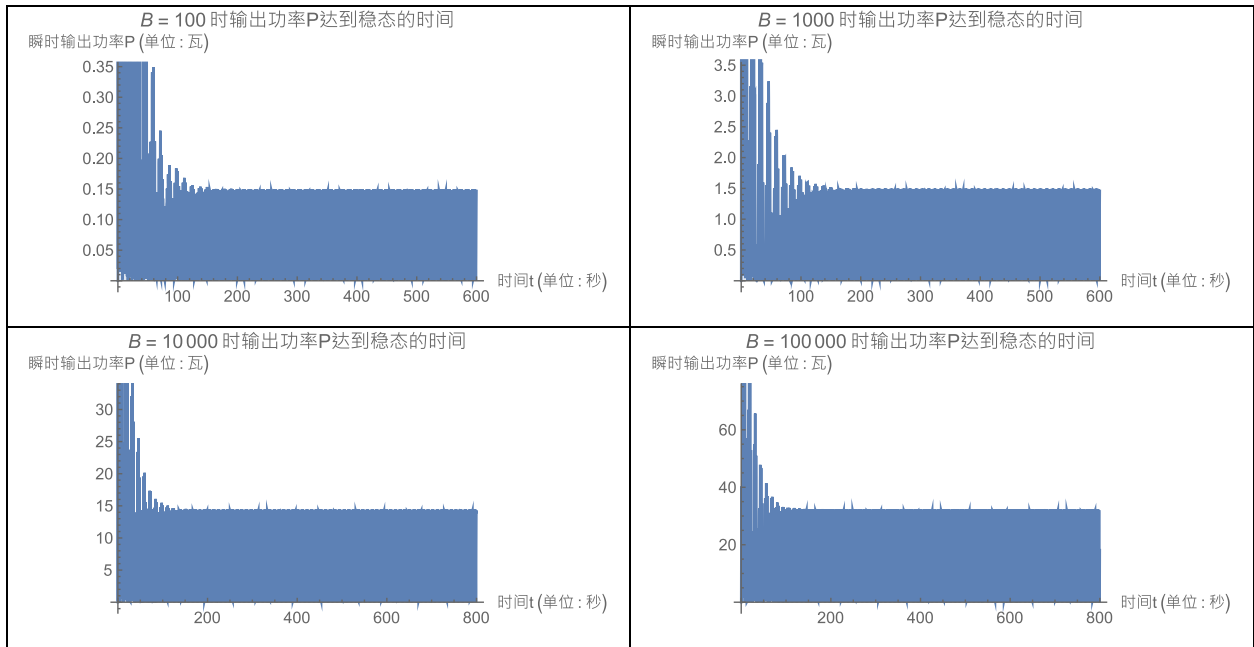


图 5 平均输出功率 P 与直线阻尼系数 B 的关系曲线 (36800 到 37800)



以上四张图分别去了四个数量级的直线阻尼系数 B 下的功率曲线，可以看出稳态时平均输出功率的变化规律，有力佐证了下文最大功率和最优阻尼系数的合理性

通过逐步精细求解可以得到，当阻尼系数为 $37384N \cdot (s/m)$ 时，PTO 系统输出功率达到最大，最大输出功率为 $229.065W$ 。

2.考虑直线阻尼系数与相对速率的幂函数成正比： $B = b|\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^\alpha$ ，其中 $\alpha \in [0,1]$ ； $b \in [0,100000]$ 。

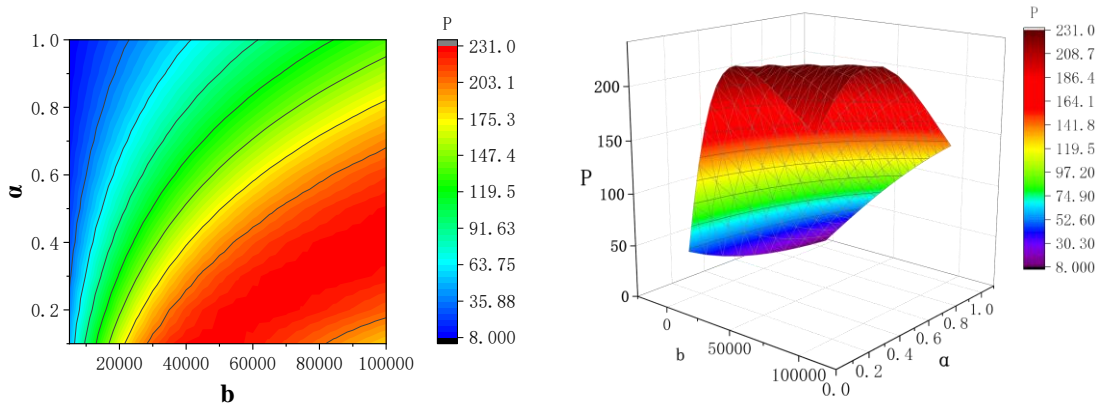


图 6 网格搜索结果 $\alpha \in [0,1]$ ； $b \in [0,100000]$

从等高线图和三维图中容易看出，在 $\alpha \in [0,1]$ ； $b \in [0,100000]$ 的区域上，平均功率的分布呈现一个“山脊状”。可进一步缩小范围实现更精细的搜索结果。

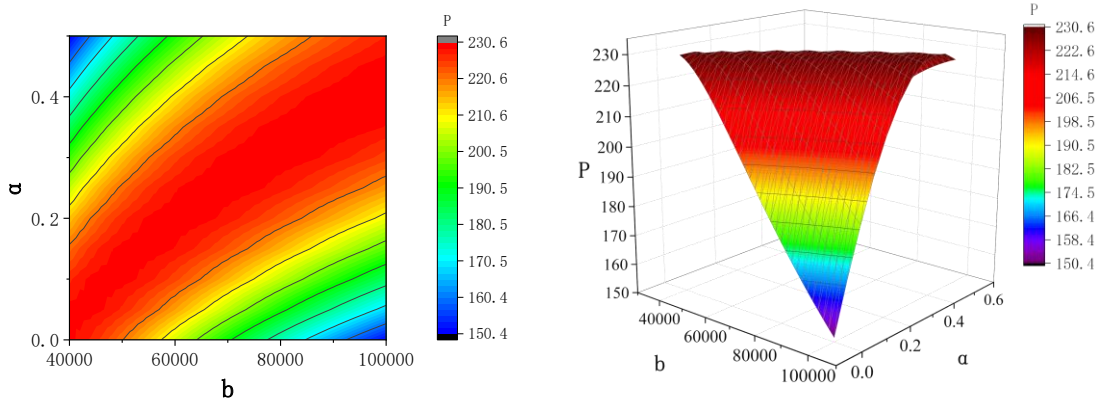
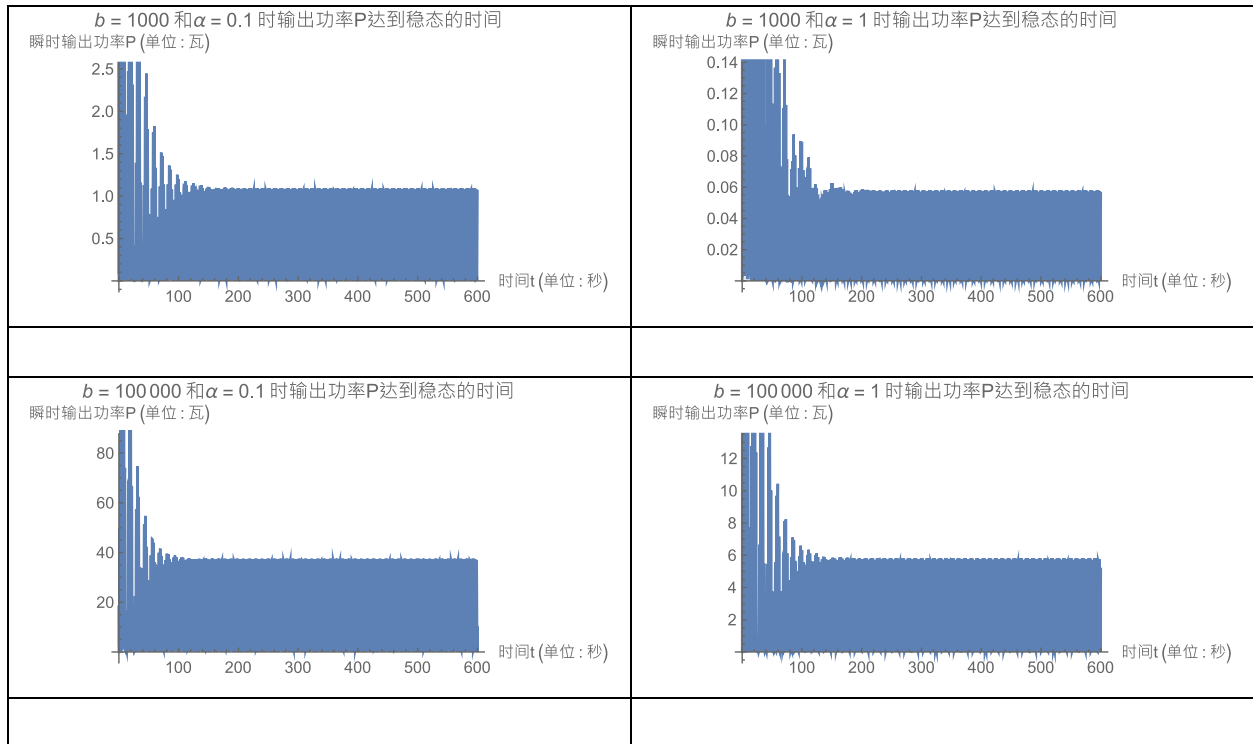


图 7 精细网格搜索结果 $\alpha \in [0,0.5]$; $b \in [40000,100000]$

通过对三维图像进行切片对比可以为极值的位置和合理性提供有力证据。



由图可知，在 $\alpha \in [0,0.5]$; $b \in [40000,100000]$ 这一区间内，功率较高的 (α, b) 坐标分布于等高线图 中的红色区域内。筛查数据可知，在红色区域内，P 随着 b 的增大而增大。最终在 $(0.4, 97600)$ 时取得 功率最大值 230.596W。

5.3 问题三

本问的模型需要考虑的运动包含垂荡和纵摇。为使得模型得到简化，可近似认为模型转动轴仅进行转动和竖直方向的振动，而没有水平方向上的移动。需要说明的是，本位中浮子与振子的在竖直方向上的位移仍然采用 x_1, x_2 来表示， x_1 表示模型转动轴的在竖直方向上的位移，水平面处为0，取竖直向上为正方向； x_2 为振子（重心）的位移，水平面处为0，取竖直向上为正方向。 θ_1 为浮子静水时的中轴（该旋转体的旋转轴）与竖直向上方向的夹角，顺时针为正； θ_2 为振子的中轴与竖直向上方向的夹角，取顺时针为正。根据上述约定，可以确定浮子和振子各个受力的大小和方向，以及方程的初始条件。

$$\begin{aligned}
 & \leftarrow \\
 & (m_1 + M)\ddot{x}_1 \\
 & = f\cos\omega t - m_1g + \rho g\pi\left(\frac{4}{15} - \frac{x_1}{\cos\theta_1}\right) - kx_1 + \kappa\left(\frac{x_2 - x_1}{\cos\theta_2} - 0.75\right)\cos\theta_2 + B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\
 & - \theta_2'\sin\theta_2)\leftarrow \\
 & \leftarrow \\
 & (I_1 + I_A)\ddot{\theta}_1 = L\cos\omega t - \gamma\theta_1 - \eta\dot{\theta}_1 - \xi\dot{\theta}_3 - \sigma\theta_3 + 0.9m_1g\sin\theta_1\leftarrow \\
 & \leftarrow \\
 & m_2\ddot{x}_2 \\
 & = -\kappa\left(\frac{x_2 - x_1}{\cos\theta_2} - 0.75\right)\cos\theta_2 - B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \theta_2'\sin\theta_2) - m_2g - m_2 * (x_2 - x_1) * \sin\theta_2 * \theta_2'' \\
 & * \text{sign}[\theta_2]/\cos\theta_2\leftarrow \\
 & \leftarrow \\
 & I_2\ddot{\theta}_2 = m_2g\frac{x_2 - x_1}{\cos\theta_2}\sin\theta_2 + \xi\dot{\theta}_3 + \sigma\theta_3\leftarrow
 \end{aligned}$$

在此基础上分别对浮子和振子列出受力方程和角动量定理方程：

$$\begin{aligned}
 & (m_1 + M)\ddot{x}_1 \\
 & = f\cos\omega t - m_1g + \rho g\pi\left(\frac{4}{15} - \frac{x_1}{\cos\theta_1}\right) - kx_1 + \kappa\left(\frac{x_2 - x_1}{\cos\theta_2} - 0.75\right)\cos\theta_2 + B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \dot{\theta}_2\sin\theta_2) \\
 & \quad (I_1 + I_A)\ddot{\theta}_1 = L\cos\omega t - \gamma\theta_1 - \eta\dot{\theta}_1 - \xi\dot{\theta}_3 - \sigma\theta_3 + 0.9m_1g\sin\theta_1 \\
 & m_2\ddot{x}_2 = -\kappa\left(\frac{x_2 - x_1}{\cos\theta_2} - 0.75\right)\cos\theta_2 - B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \dot{\theta}_2\sin\theta_2) - m_2g - \frac{m_2(x_2 - x_1)(\sin\theta_2)\text{sign}[\theta_2]}{\cos\theta_2} \\
 & \quad I_2\ddot{\theta}_2 = m_2g\frac{x_2 - x_1}{\cos\theta_2}\sin\theta_2 + \xi\dot{\theta}_3 + \sigma\theta_3 \tag{5}
 \end{aligned}$$

从方程中可以看出，浮子的纵摇方程需要附加一个转动惯量，这是由波浪对装置的作用引起的。直线阻尼和旋转阻尼系数应题目要求，设定为常数。

模型依然以静止平衡作为初始条件，则可以列出初始条件如下所示：

$$\begin{cases} x_1 = -2; x_2 = -1.548m; \dot{x}_1 = 0; \dot{x}_2 = 0 \\ \theta_1 = 0; \theta_2 = 0; \dot{\theta}_1 = 0; \dot{\theta}_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

转动惯量的求解：以浮子的底座上，旋转阻尼器和旋转弹簧的固定点所确定的轴为模型转动轴，分别求解浮子和振子的转动惯量。虽然浮子和振子均为旋转体，但是模型转动轴不与旋转体的旋转轴重合，故需要特别计算转动惯量。基本思路为，将旋转体沿着自己的旋转轴切片后计算每一个微薄片（或圆环）沿着旋转轴的转动惯量，再根据平行轴定理和正交轴定理，得到微薄片（或圆环）沿着模型转动轴的转动惯量，之后积分得到整个旋转体沿模型转动轴的转动惯量。

浮子的转动惯量：忽略浮子厚度，计算其质量的面密度。将浮子分解成三个部分：圆锥面，圆柱面和顶面圆盘。分别计算其转动惯量。

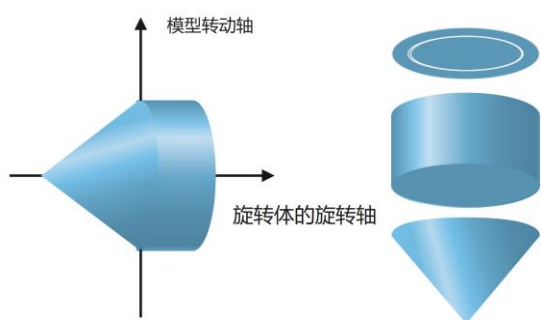


表 4 浮子转动惯量

浮子部件名称	转动惯量($kg \cdot m^2$)
圆锥面部分	190.702
圆柱面部分	14035.334
顶面圆盘部分	6182.230
浮子总转动惯量	20408.266

振子的转动惯量：振子视作质量分布均匀的实心圆柱，将其沿着自己的旋转轴分成无限个薄圆片，进行求解振子沿着模型转动轴的转动惯量。由于振子在垂荡和纵摇的过程中不仅有角向运动，还有径向运动，故其转动惯量随着 l_2 改变而改变。

先计算浮子的质量面密度为 $\Omega = \frac{m_2}{S} = 212.742 kg/m^2$

先计算圆锥面的转动惯量：将浮子且成一个个微圆环，则有 $dI_x = r^2 dm = \Omega 2\pi r^3 dx$ ，根据正交轴定理 $dI_x = dI_{y'} + dI_{z'} = 2dI_{z'}$ ，则有 $dI_{z'} = \frac{1}{2} dI_x = \Omega \pi r^3 dx$ 。根据平行轴定理有：

$$dI_z = dI_{z'} + x^2 dm = \Omega \pi (r^3 + 2rx^2) dx = \Omega \pi \left[\left(-\frac{5}{4}x + 1 \right)^3 + 2 \left(-\frac{5}{4}x + 1 \right) x^2 \right] dx$$

则圆锥面的转动惯量为 $I_{圆锥} = \int_0^{0.8} dI_z = 190.702 (kg \cdot m^2)$ 。同理得到圆柱面的转动惯量为

$$I_{圆柱} = \Omega \pi \int_{-3}^0 (1 + 2x^2) dx = 21 \Omega \pi = 14035.334 (kg \cdot m^2); I_{圆盘} = 9.25 \Omega \pi = 6182.230 (kg \cdot m^2)$$

用同样的方法，最终求解得到其转动惯量 I_2 与 l_2 的关系如下：

$$I_2 = \int_{l_2-h/2}^{l_2+h/2} \left(\frac{r^2}{4} + l^2 \right) dl = \frac{\rho\pi}{96} + \frac{\rho\pi}{8} l_2^2 = 202.75 + 2433 l_2^2 (kg \cdot m^2)$$

5.4 问题四

在已有的“垂荡+纵摇”模型的基础上，可以通过改变直线阻尼器系数和扭转阻尼系数来探究其与 PTO 输出功率的关系，从而确定最大输出功率及其相应的最优阻尼系数组 (B, ξ) 。

根据 $P = Fv$ 可以计算出 PTO 系统的瞬时功率为

$$P = B|\dot{x}_1 - \dot{x}_2|^2 + \xi|\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2|^2 \quad (7)$$

与问题二同理，考虑用经过足够长时间的演化后的一段时间范围内的瞬时功率的黎曼和除以时间来表征平均功率。

6 模型的评价与改进

6.1 优点

模型进行了合理的理想简化：浮子的圆锥部分不露出水面的条件下，忽略的模型的外轮廓形状，简化了受力计算过程；在一、二问中，使用统一的一维坐标系优化了坐标变换的过程；在三、四问中，对转动中心进行假设确定，使得在合理范围内可以用较为固定的模型描述整体运动过程。

6.2 有待改进之处

模型做出的部分假设不足以完全贴合实际情况，例如

- 本模型中认为海水是无旋无粘、不可压缩的流体；
- 忽略了除振子和浮子之外的其他部件的质量；
- 忽略了振子内部的结构，认为振子是质量均匀分布的圆柱体；
- 没有考虑 PTO 系统内部的能量转化过程及效率。

7 结论

本次建模主要建立了两个模型：一是波浪能装置的垂荡运动模型，二是波浪能装置的垂荡和纵摇运动模型。通过求解第一个模型，得到了在仅考虑垂荡的情况下，浮子和振子的位移和速度（结果在 result-1 和 result-2 中）。通过调节直线阻尼系数，得到了仅考虑垂荡时，两种不同阻尼系数的情况下的最大 PTO 输出功率。

在第二个模型中，装置在垂荡的同时还会进行纵摇。通过对两体的受力和力矩分析建立方程得到了运动模型。精确的计算了浮子和振子的转动惯量，顺利推导出模型对应微分方程组及其初始条件（公式 5、6）和 PTO 顺势功率的形式（公式 7）

参考文献

- [1] 王珣. 半潜式平台和垂荡式波能浮子系统水动力特性研究[D/OL]. 哈尔滨工程大学, 2021[2022-09-18].
- [2] 陈佳, 兰飞, 郭昊霖, 等. 波浪能发电控制技术研究综述[J]. 电力自动化设备, 2022: 1-20.
- [3] 王项南, 张原飞, 俞彦辉, 等. 波浪能发电装置现场测试与评价分析[J]. 太阳能学报, 2020, 41(08): 15-20.
- [4] 丁松, 韩端锋. 垂荡式波浪能装置运动模型数值分析[J]. 海洋工程, 2016, 34(04): 107-117.
- [5] 彭宇豪. 横摇式波浪发电装置的数值与试验研究[D/OL]. 大连理工大学, 2020[2022-09-18].
- [6] 巩冰. 振荡浮子式波浪能发电系统关键技术研究[D/OL]. 哈尔滨工程大学, 2015[2022-09-18].
- [7] 周丙浩. 纵摇浮子式波浪能转换装置研究[D/OL]. 哈尔滨工程大学, 2018[2022-09-18].

附录

本次建模的模型求解皆是采用 mathematica 进行的，代码如下：

Q11 代码

```
(*以下皆为国际制单位*)□m1 = 4866;(*浮子质量*)□M = 1335.535;(*附加质量*)□m2  
= 2433;(*振子质量*)□g = 9.8;(*重力加速度*)□B = 100;(*直线阻尼器阻尼系数*)□κ  
= 80000;(*弹簧刚度*)□f = 6250;(*激励力振幅*)□ω = 1.4005;(*激励力角频率*)□ρ  
= 1025;(*海水密度*)□V0 = Pi * 34/15;(*初始淹没体积*)□k = 656.3616;(*兴波阻尼*)□r  
= 1;(*浮子半径*)□
```

```
(*求解常微分方程组*)□sol = NDSolve[{(m1 + M) * x1''[t] =
= f * Cos[ω * t] - B * (x1'[t] - x2'[t]) + κ * (x2[t] - x1[t] + 1.25) - m1 * g + ρ * g * (V0 - x1[t]
* Pi * r^2) - k * x1'[t],□m2 * x2''[t] =
= B * (x1'[t] - x2'[t]) - m2 * g - κ * (x2[t] - x1[t] + 1.25),□x1[0] == 0, x1'[0] == 0, x2[0] =
= -1.54805277, x2'[0] == 0},□{x1[t], x2[t], x1'[t], x2'[t]},□{t, 0, 1000, 0.2}]
(*画散点图*)□DiscretePlot[x1[t]/. sol, {t, 0, 200, 0.2}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间 t(单位: 秒)], HoldForm[竖直方向位置/m]}, PlotLabel
→ HoldForm[浮子]]□DiscretePlot[x2[t]/. sol, {t, 0, 200, 0.2}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间 t(单位: 秒)], HoldForm[竖直方向位置/m]}, PlotLabel
→ HoldForm[振子]]□DiscretePlot[x2[t] - x1[t]/. sol, {t, 0, 200, 0.2}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间 t(单位: 秒)], HoldForm[竖直方向位置/m]}, PlotLabel
→ HoldForm[振子对浮子的相对位移]]□DiscretePlot[B * (x1'[t]
- x2'[t])^2/. sol, {t, 0, 600, 0.2}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间 t(单位: 秒)], HoldForm[瞬时输出功率 P(单位: 瓦)]}, PlotLabel → HoldForm[B
= 100 时输出功率 P 达到稳态的时间]]
(*导出数据*)□Export["data11.csv", Table[{t, x1[t]/. sol, x2[t]/. sol, x1'[t]/. sol, x2'[t]
/. sol}, {t, 0, 200, 0.2}]]
```

Q12 代码

```
(*以下皆为国际制单位*)□m1 = 4866; (*浮子质量*)□M = 1335.535; (*附加质量*)□m2
= 2433; (*振子质量*)□g = 9.8; (*重力加速度*)□b = 1000; (*直线阻尼器阻尼系数的比例系数*)□α
= 0.1; (*幂指数*)□κ = 80000; (*弹簧刚度*)□f = 6250; (*激励力振幅*)□ω
= 1.4005; (*激励力角频率*)□ρ = 1025; (*海水密度*)□V0 = Pi * 34/15; (*初始淹没体积*)□k
= 656.3616; (*兴波阻尼*)□r = 1; (*浮子半径*)□
(*求解常微分方程组*)□sol = NDSolve[{(m1 + M) * x1''[t] =
= f * Cos[ω * t] - b * (Abs[x1'[t] - x2'[t]]^α * (x1'[t] - x2'[t]) + κ * (x2[t] - x1[t] + 1.25) - m1
* g + ρ * g * (V0 - x1[t] * Pi * r^2) - k * x1'[t],□m2 * x2''[t] =
= b * (Abs[x1'[t] - x2'[t]]^α * (x1'[t] - x2'[t]) - m2 * g - κ * (x2[t] - x1[t] + 1.25),□x1[0] =
= 0, x1'[0] == 0, x2[0] == -1.54805277, x2'[0] =
= 0},□{x1[t], x2[t], x1'[t], x2'[t]},□{t, 0, 1000, 0.2}]□
```

```
(*画散点图*)□DiscretePlot[x1[t]/.sol,{t,0,200,0.2},AxesLabel
→{HoldForm[时间 t(单位:秒)],HoldForm[竖直方向位置 x1(单位:米)]},PlotLabel
→HoldForm[浮子]]□DiscretePlot[x2[t]/.sol,{t,0,200,0.2},AxesLabel
→{HoldForm[时间 t(单位:秒)],HoldForm[竖直方向位置 x2(单位:米)]},PlotLabel
→HoldForm[振子]]□DiscretePlot[x2[t]-x1[t]/.sol,{t,0,200,0.2},AxesLabel
→{HoldForm[时间 t(单位:秒)],HoldForm[竖直方向位置(x2-x1)(单位:米)]},PlotLabel
→HoldForm[振子对浮子的相对位移]]□DiscretePlot[b*(Abs[x1'[t]-x2'[t]]^α)*(x1'[t]-
x2'[t])^2/.sol,{t,0,600,0.2},AxesLabel
→{HoldForm[时间 t(单位:秒)],HoldForm[瞬时输出功率 P(单位:瓦)]},PlotLabel→HoldForm[b
=1000和α=0.1时输出功率P达到稳态的时间]]
(*导出数据*)□Export["data12.csv",Table[{t,x1[t]/.sol,x2[t]/.sol,x1'[t]/.sol,x2'[t]
/.sol},{t,0,200,0.2}]]
```

Q21 代码

```
(*以下皆为国际制单位*)□m1=4866;(*浮子质量*)□M=1165.992;(*附加质量*)□m2
=2433;(*振子质量*)□g=9.8;(*重力加速度*)□(*B=直线阻尼器阻尼系数*)□κ
=80000;(*弹簧刚度*)□f=4890;(*激励力振幅*)□ω=2.2143;(*激励力角频率*)□ρ
=1025;(*海水密度*)□V0=Pi*34/15;(*初始淹没体积*)□k=167.8395;(*垂荡兴波阻尼*)□r
=1;(*浮子半径*)□BP={};
(*第一层循环,对B进行搜索,求解常微分方程组;第二层循环,在第一层求解出P的500个点的情
况*)□
= NDSolve[{(m1+M)*x1''[t]=
=f*Cos[ω*t]-B*(x1'[t]-x2'[t])+κ*(x2[t]-x1[t]+1.25)-m1*g+ρ*g*(V0-x1[t]
*Pi*r^2)-k*x1'[t],□m2*x2''[t]=
=B*(x1'[t]-x2'[t])-m2*g-κ*(x2[t]-x1[t]+1.25),□x1[0]==0,x1'[0]==0,x2[0]=
=-1.548,x2'[0]==0},□{x1'[t],x2'[t]},□{t,1000,1080,0.005}];□P=0;□Do[P+=
B*(x1'[t]-x2'[t])^2/.sol,{t,1000,1080,0.005}];□pp=First[P]/16000;□BPe
={};□AppendTo[BPe,B];□AppendTo[BPe,pp];□AppendTo[BP,BPe],□{B,37340,37440,1}□□
```


ListPlot[BP, AxesLabel

→ {HoldForm[阻尼系数 B(单位: 牛·秒/米)], HoldForm[平均输出功率 P(单位: 瓦)]}, PlotLabel

→ HoldForm[平均输出功率 P 随 B 的变化], PlotRange

→ {{37335, 37445}, {229.0584, 229.0587}}, LabelStyle → {GrayLevel[0]}

Q22 代码

```
(*以下皆为国际制单位*)  
m1 = 4866; (*浮子质量*)  
M = 1165.992; (*附加质量*)  
m2 = 2433; (*振子质量*)  
g = 9.8; (*重力加速度*)  
B = 直线阻尼器阻尼系数*  
b = 直线阻尼器阻尼系数的比例系数*  
alpha = 幂指数*  
kappa = 80000; (*弹簧刚度*)  
f = 4890; (*激励力振幅*)  
omega = 2.2143; (*激励力角频率*)  
rho = 1025; (*海水密度*)  
V0 = Pi * 34/15; (*初始淹没体积*)  
k = 167.8395; (*垂荡兴波阻尼*)  
r = 1; (*浮子半径*)  
listP = {};  
maxp = 0; maxalpha = 0; maxb = 0;  
(*第一层循环, 对 alpha 进行搜索; 第二层循环, 对 b 进行搜索, 并求解常微分方程组;  
第三层循环, 在第二层求解出 P 的 500 个点的情况下, 对这 500 个点进行求和取平均, 结果存进 listP  
并把最大值存下来*)  
Do[sol = NDSolve[{(m1 + M) * x1''[t] =  
f * Cos[omega * t] - b * (Abs[x1'[t] - x2'[t]]^alpha) * (x1'[t] - x2'[t]) + kappa * (x2[t] - x1[t] + 1.25) - m1  
* g + rho * g * (V0 - x1[t] * Pi * r^2) - k * x1'[t], m2 * x2''[t] =  
b * (Abs[x1'[t] - x2'[t]]^alpha) * (x1'[t] - x2'[t]) - m2 * g - kappa * (x2[t] - x1[t] + 1.25)}, {x1[0] =  
0, x1'[0] == 0, x2[0] == -1.548, x2'[0] == 0}, {x1'[t], x2'[t]}, {t, 1000, 1080, 0.05}];  
P = First[sol]/1600; If[pp > maxp, maxp = pp; maxalpha = alpha; maxb = b];  
AppendTo[listP, pp], {alpha, 0, 0.45, 0.05}, {b, 40000, 100000, 600}]  
  
Print[maxalpha] Print[maxb] Print[maxp]  
Print[listP]
```

Q22 代码

```
(*以下皆为国际制单位*) $\square m1 = 4866$ ;(*浮子质量*) $\square m2 = 2433$ ;(*振子质量*) $\square \kappa$   
= 80000;(*垂直弹簧刚度*) $\square \sigma = 250000$ ;(*扭转弹簧刚度*) $\square g = 9.8$ ;(*重力加速度*) $\square \rho$   
= 1025;(*海水密度*) $\square \gamma = 8890.7$ ;(*静水恢复力矩系数*) $\square \square M = 1028.876$ ;(*垂荡附加质量*) $\square Ia$   
= 7001.914;(*纵摇附加转动惯量*) $\square B = 10000$ ;(*直线阻尼器阻尼系数*) $\square \xi$   
= 1000;(*转动阻尼器阻尼系数*) $\square f = 3640$ ;(*垂荡激励力振幅*) $\square L$   
= 1690;(*纵摇激励力矩振幅*) $\square \omega = 1.7152$ ;(*激励力角频率*) $\square k = 683.4558$ ;(*垂荡兴波阻尼*) $\square \eta$   
= 654.3383;(*纵摇兴波阻尼*) $\square I1 = 20408.266$ ;  $\square n = 4$ ;  $\square nstep = 0.2$ ;  
  
(*求解常微分方程组*) $\square sol = NDSolve[\{(m1 + M) * x1''[t] =$   
=  $f * Cos[\omega * t] - m1 * g + \rho * g * Pi * (4/15 - x1[t]/Cos[\theta1[t]]) - k * x1'[t] + \kappa$   
*  $((x2[t] - x1[t])/Cos[\theta2[t]] - 0.75) * Cos[\theta2[t]] + B * (x2'[t] - x1'[t] - \theta2'[t] * Sin[\theta2[t]]), \square (I1$   
+  $Ia) * \theta1''[t] =$   
=  $L * Cos[\omega * t] - \gamma * \theta1[t] - \eta * \theta1'[t] - \xi * (\theta1'[t] - \theta2'[t]) - \sigma * (\theta1[t] - \theta2[t]) + 0.9 * m1 * g$   
*  $Sin[\theta1[t]], \square m2 * x2''[t] =$   
=  $-\kappa * ((x2[t] - x1[t])/Cos[\theta2[t]] - 0.75) * Cos[\theta2[t]] - B * (x2'[t] - x1'[t] - \theta2'[t] * Sin[\theta2[t]])$   
-  $m2 * g - m2 * (x2[t] - x1[t]) * Sin[\theta2[t]] * \theta2''[t] * Sign[\theta2[t]]/Cos[\theta2[t]], \square (202.75 + 2433$   
*  $((x2[t] - x1[t])/Cos[\theta2[t]])^2) * \theta2''[t] =$   
=  $m2 * g * Sin[\theta2[t]] * (x2[t] - x1[t])/Cos[\theta2[t]] + \xi * (\theta1'[t] - \theta2'[t]) + \sigma * (\theta1[t] - \theta2[t]), \square x1[0]$   
==  $-2, x2[0] == -1.548, x1'[0] == 0, x2'[0] == 0, \theta1[0] == 0, \theta2[0] == 0, \theta1'[0] == 0, \theta2'[0] =$   
=  $0\}, \square \{x1[t], x2[t], x1'[t], x2'[t], \theta1[t], \theta2[t], \theta1'[t], \theta2'[t]\}, \square \{t, 0, 200, 0.2\}, MaxSteps$   
→  $1000000, MaxStepSize \rightarrow 0.001, Method \rightarrow "StiffnessSwitching" \square$ 
```

(*画散点图*) □ DiscretePlot[l1[t]/. sol, {t, 0, n, nstep}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间/s], HoldForm[l1/m]}, PlotLabel → HoldForm[浮子], PlotRange
→ All] □ DiscretePlot[l2[t]/. sol, {t, 0, n, nstep}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间/s], HoldForm[l2/m]}, PlotLabel
→ HoldForm[振子相对浮子转轴的径向运动], PlotRange
→ All] □ (*DiscretePlot[l2[t] - l1[t]/. sol, {t, 0, n, nstep}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间/s], HoldForm[l2 - l1/m]}, PlotLabel
→ HoldForm[竖直方向振子对浮子的相对位移], PlotRange
→ All] *) □ DiscretePlot[θ1[t]/. sol, {t, 0, n, nstep}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间/s], HoldForm[纵摇角位移/rad]}, PlotLabel → HoldForm[浮子], PlotRange
→ All] □ DiscretePlot[θ2[t]/. sol, {t, 0, n, nstep}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间/s], HoldForm[纵摇角位移/rad]}, PlotLabel → HoldForm[振子], PlotRange
→ All] □ (*DiscretePlot[θ2[t] - θ1[t]/. sol, {t, 0, n, nstep}, AxesLabel
→ {HoldForm[时间/s], HoldForm[纵摇角位移/rad]}, PlotLabel
→ HoldForm[振子对浮子的相对纵摇角位移], PlotRange → All] *) □

$$(m_1 + M)\ddot{l}_1 = f \cos \omega t - m_1 g + \rho g \left(\frac{4}{15} - \frac{l_1}{\cos \theta_1} \right) - k \dot{l}_1 + \kappa (l_2 - 0.75) \cos \theta_2 + B \dot{l}_2 \cos \theta_2$$

方程备用:

$$(m_1 + m_2 + M)\ddot{l}_1 = f \cos \omega t - (m_1 + m_2)g + \rho g \pi \left(\frac{4}{15} - \frac{l_1}{\cos \theta_1} \right) - k \dot{l}_1$$

$$(I_1 + I_A)\ddot{\theta}_1 = L \cos \omega t - \gamma \theta_1 - \eta \dot{\theta}_1 - \xi \dot{\theta}_3 - \sigma \theta_3$$

$$m_2 \ddot{l}_2 = -\kappa (l_2 - 0.75) - B \dot{l}_2 - m_2 g \cos \theta_2$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = m_2 g l_2 \sin \theta_2 + \xi \dot{\theta}_3 + \sigma \theta_3$$

$$(m_1 + M)\ddot{x}_1 = f \cos \omega t - m_1 g + \rho g \pi \left(\frac{4}{15} - \frac{x_1}{\cos \theta_1} \right) - k \dot{x}_1 + \kappa \left(\frac{x_2 - x_1}{\cos \theta_2} - 0.75 \right) \cos \theta_2 + B \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{\cos \theta_2} \cos \theta_2$$

$$(I_1 + I_A)\ddot{\theta}_1 = L \cos \omega t - \gamma \theta_1 - \eta \dot{\theta}_1 - \xi \dot{\theta}_3 - \sigma \theta_3 + 0.9 m_1 g \sin \theta_1$$

$$m_2 \frac{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}{\cos \theta_2} = -\kappa \left(\frac{x_2 - x_1}{\cos \theta_2} - 0.75 \right) - B \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{\cos \theta_2} - m_2 g \cos \theta_2$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = m_2 g \frac{x_2 - x_1}{\cos \theta_2} \sin \theta_2 + \xi \dot{\theta}_3 + \sigma \theta_3$$